A 34. ORTVAY RUDOLF FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI 2003

Az ELTE TTK Fizikus Diákköre, a Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2003-ben is meghirdeti a hagyományos, immár 34-ik, ezúttal már hatodszor nemzetközi Ortvay Rudolf Fizikai Feladatmegoldó Versenyt. Időpont: 2003. október 31 – november 10.

Az Ortvay versenyen minden – hazai és külföldi – egyetemi hallgató indulhat. Az értékelés és a díjazás évfolyamonként történik. A doktoranduszok külön kategóriát alkotnak. A verseny egyéni: páros vagy csoportosan írt dolgozatokat nem fogadunk el. Kérjük a beadott feladatokon megadni a versenyző egyetemét, szakát és évfolyamát. Álnév vagy jelszó nem használható, minden versenyző valódi néven indul.

A feladatok **2003. október 31-én, pénteken, közép-európai idő szerint 12 órától (11:00 GMT)** magyar és angol nyelven, html, LaTeXés Postscript formátumban **letölthetők** az Ortvay-verseny weblapjáról:

http://ortvay.elte.hu/,
http://www.saas.hu/ortvay.

Budapesten emellett a feladatok – ugyanettől az időponttól – nyomtatott formában is átvehetők az ELTE lágymányosi Fizika–Kémia tömbjének (H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A) földszinti társalgójában. A lágymányosi Mafihe irodában (2.64 szoba) a későbbiekben egy mesterpéldány áll a fénymásolni kivánók rendelkezésére.

A BME-n, a JATE-n, a KLTE-n, a JPTE-n és számos külföldi egyetemen helyi szervezők intézik a feladatok sokszorosítását és kiosztását.

Figyelem! A szervezők minden igyekezete ellenére is előfordulhat, hogy egy-egy értelemzavaró fogalmazási vagy gépelési hiba marad a feladatok szövegében. Érdemes ezért a továbbiakban is figyelni a fenti weblapot, illetve a lágymányosi Mafihe hirdetőtáblát, ahol az esetleges javításokat, módosításokat azonnal közzétesszük.

Egy versenyző maximálisan 10 feladat megoldását adhatja be. Minden feladat megoldására maximálisan 100 pontot lehet kapni.

A feladatok megoldásához *bármilyen segédeszköz használható.* Könyvre, folyóiratcikkre hivatkozni lehet.

Minden feladat megoldását külön A4-es lap(ok)ra kérjük leírni. Egy lapnak csak az egyik oldalára írjunk vagy nyomtassunk! Ne írjunk ceruzával vagy vékony másolópapírra – ezeket nem tudjuk elfaxolni a megoldások javítóinak. Az ilyen dolgozatokat nem fogadjuk el.

Ha a megoldáshoz számítógépes program is tartozik, kérjük írásban megadni a program részletes dokumentációját (milyen nyelven íródott, hogyan lehet elindítani, milyen paramétereket lehet beállítani, melyik betű mit jelent, hogyan kell a program készítette ábrákat vagy táblázatokat értelmezni, stb.) A programokat floppylemezen lehet mellékelni, vagy e-mailen lehet elküldeni az alább megadott címre.

A megoldásokat személyesen, postán, faxon vagy e-mailen (TeX, LaTeX vagy Postscript formátumban, vagy – ha nincsenek benne képletek – közönséges elektronikus levélben) lehet beküldeni. Kérjük a versenyzőket, hogy csak az alapvető LaTeX stílusfájlokat használják, vagy a felhasznált speciális stílusfájlokat mellékeljék a beadott anyaghoz. Az elektronikusan beadott dolgozatokhoz – külön e-mailben – kérjük csatolni a tartalomjegyzéket és az esetleges kibontási útmutatót.

Személyesen a lágymányosi Északi tömbben, a Mafihe Irodában (2.64 szoba) lehet a megoldásokat leadni.

Postacím: ELTE TTK Fizikus Diákkör, Dávid Gyula, ELTE TTK Atomfizika Tanszék
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A
Faxszám: Dávid Gyula, 36/1/3722753 vagy Cserti József, 36/1/3722866
E-mail cím: dgy@ludens.elte.hu vagy ortvay@saas.city.tvnet.hu

Beadási határidő: 2003. november 10. hétfő, közép-európai idő szerint 12 óra (11:00 GMT).

Kérjük, hogy a feladatok valamilyen formában történt postázása után minden versenyző töltse ki a verseny weblapjáról nyíló adatlapot. Ez a versenyzők és beadott megoldásaik azonosítására szolgál. **Figyelem! Az adatlap kitöltése nélkül a zsűri nem tudja elfogadni a beküldött megoldásokat! Az adatlap csak november 10-én és 11-én lesz elérhető, kérjük mielőbb kitölteni!**

A verseny díjazása évfolyamonként történik, az összpontszám alapján. A zsűri fenntartja a jogot, hogy egyes díjakat ne, megosztva vagy több példányban adjon ki. A pénzjutalommal járó első, második és harmadik díjak mellett dicséretek, illetve egyes feladatok kiváló megoldásáért különdíjak is odaítélhetők. Ezért már egy-két feladat megoldását is érdemes beadni!

A verseny eredményhirdetése december 4-én lesz, a hagyományos Fizikus Mikulással egybekötve. A pontos helyszínt később közöljük a verseny weblapján. Az ünnepélyes eredményhirdetést a feladatok megoldásának megvitatása követi. Az egyes feladatok legjobb megoldóit ezennel előre felkérjük, hogy ismertessék megoldásaikat. (A verseny egész Földre kiterjedt volta ellenére ez a felkérés értelemszerűen csak a hazai versenyzőkre vonatkozik.) A részletes eredmény ezután megtekinthető lesz a verseny weblapján. A díjazott versenyzőket e-mailben értesítjük, az okleveleket és a pénzjutalmakat postán küldjük el.

A verseny feladatait és megoldásaikat – az egyes feladatok legjobb megoldóinak szövegezésében (melyre őket ezennel felkérjük) – angol nyelvű kiadványban szeretnénk megjelentetni. Ezt a kiadványt a fizikushallgatók nemzetközi szervezete, az IAPS, valamint a verseny résztvevői segítségével világszerte terjeszteni kívánjuk. Reméljük, ez még jobban hozzájárul a verseny nemzetközivé válásához.

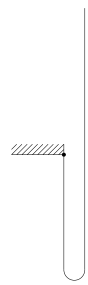
Sikeres versenyzést, tartalmas és hasznos fejtörést kívánunk minden versenyzőnek!

A verseny szervezői: Dávid Gyula, Piróth Attila, Cserti József

1. Olyan csigalassúsággal telnek a napok ebben az esős időben!... — gondolhatjuk november elején. Ebben az esős, párás időben hanyagoljuk el az óceánok párolgását, és tételezzük fel, hogy a világon mindenhol esik az eső! Mennyivel változik emiatt a nap hossza?

(Veres Gábor)

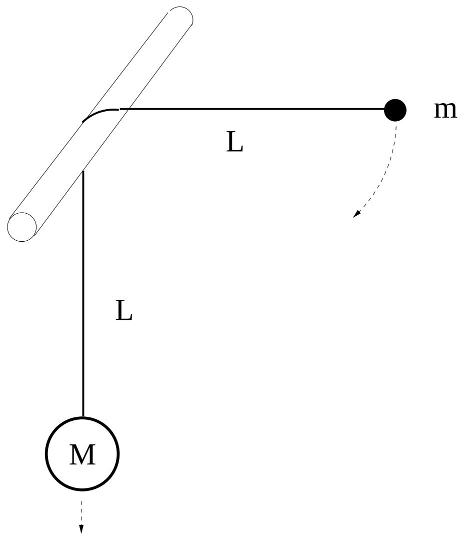
2. Egyik végén rögzített kötelet az alábbi ábrán látható helyzetből elengedünk (a kötél tehát közelíthető két függőleges egyenes szakasszal, melyeket alul egy kis sugarú körív köt össze.)
a) Írjuk le a kötél mozgását, addig a helyzetig, amikor a kötél rögzítetlen vége a legalsó helyzetét el nem éri!
b) Megmarad-e a mechanikai energia a mozgás során? Ha nem, akkor hol és miért disszipálódik?
c) Első közelítésben hogyan változik a mozgás során a függőleges köteldarabokat összekötő körív sugara?



(Varga Dezső)

3. Egy vékony (elhanyagolható sugarú) rúd alakú pálcát vízszintes helyzetben rögzítünk. Egy $2L$ hosszúságú fonál végeire m és M tömegű testeket erősítünk, majd a fonalat a rúdra fektetjük úgy, hogy az M tömegű test L hosszú függőleges szálon lóg, a másik test pedig a rúddal azonos magasságban, attól L távolságban nyugszik. A testeket elengedve a fonál valameddig csúszik a rúdon, majd megtapad. Tételezzük fel, hogy a rúd és a fonál olyan speciális anyagból készült, melyek között a csúszási súrlódás elhanyagolható, a tapadási súrlódás viszont nagyon nagy! Azt is feltehetjük, hogy az m tömegű test mozgás közben nem akad be a másik testet tartó függőleges fonálszakaszba.

Mekkora M/m tömegarány szükséges ahhoz, hogy a mozgás során a fonál mindvégig feszes maradjon?



(Gnädig Péter, Nemzetközi Diákolimpiai feladat nyomán)

4. Keressük meg az $U(x) = ax^{-12} - bx^{-6}$ $(a, b > 0)$ potenciálban mozgó tömegpont nyugalmi helyzetét, és kicsiny kimozdulások esetén a rezgés frekvenciáját! Hogyan módosul ez a frekvencia, ha a kimozdulás amplitúdója növekszik, de továbbra is kicsi? Milyen mozgások várhatók két dimenzióban $U(r) = ar^{-12} - br^{-6}$ potenciál esetén, nagyon kicsi, és nem túl kicsi kimozdulásokra?

(Pollner Péter)

5. Több űrhajózási terv foglalkozik azzal az ötlettel, hogy egy űrszondát juttasson a Föld-Hold rendszer egyik Lagrange-pontjába. Ez az L pont a Hold (körnek feltételezett) pályáján helyezkedik el, a Földdel és a Holddal egyenlő oldalú háromszöget alkot. Bizonyítsuk be, hogy ez a pont a szonda részére stabil egyensúlyi helyzet, és számítsuk ki a pontból kissé kitérített szonda normálrezgéseinek frekvenciáit, valamint a rezgési pálya alakját!

(Dávid Gyula)

6. Egy lejtőre két testet helyezünk: egy r sugarú, m tömegű, viszonylag vékony falú csövet, és egy ugyancsak r sugarú, m tömegű, (kicsiny sűrűségű anyagból készült) tömör hengert. A két test érinti egymást és a lejtőt, a tömör henger van felül, és kezdetben állnak. A súrlódási együttható valamennyi érintkező felületnél $\mu = 1/2$.

Mekkora lehet a lejtő hajlássszöge, ha a két test csúszásmentesen gördül?

(Balogh Péter, Váchartyán)

7. Van két darab S hosszúságú, súlytalan és nyújthatatlan, kör keresztmetszetű kötelünk; keresztmetszetük sugara R. A köteleket a plafonra függesztjük; a felfüggesztési pontok távolsága D. A kötelek másik végeihez egy L hosszúságú homogén tömegeloszlású vékony rúd végeit rögzítjük. A kapott rendszer olyan, mint a légtornászok trapéza. Ezután a rendszer egyensúlyi helyzetéből kiindulva a rudat a rendszer függőleges szimmetriatengelye körül N-szer megforgatjuk, miközben a kötelek is összetekerednek. Tegyük fel, hogy a kötelekben nem tárolódik torziós energia, és tekintsünk el mindennemű súrlódástól és közegellenállástól! Mennyi idő alatt tekeredik ki a magára hagyott rendszer? Írjuk le a mozgást, ha jelentős az érintkező kötelek között a súrlódás! (A konkrét számoláshoz használjuk a következő adatokat: $S = 3$ m, $D = 1$ m, $L = 2$ m, $R = 1$ cm, $N = 20$; a súrlódási együttható legyen μ=0,5.)

(Gáspár Merse Előd)

8. Csillagászok felfedezik, hogy parabolapályán a Nap felé közeledik két egyforma tömegű üstökös. Megállapítják, hogy impulzusnyomatékaik azonos nagyságú, de ellentétes irányú vektorok.

   A két üstökös a pálya napközeli pontjában (perihélium) összeütközik, és különböző irányú, de azonos nagyságú sebességgel induló darabokra esik szét. Mi a törmelékek további pályájának burkolófelülete?

   (Prof. Mihail Sandu, Románia, feladata nyomán)

9. Milyen lenne egy homogén tömegeloszlású, gömb alakú test gravitációs tere a testen belül és azon kívül, ha a Newton-törvényben $n \neq 2$ kitevő szerepelne?

   Képzeljük el, hogy a Teremtő már megalkotta a matematika (később Erdős Pál által sokat emlegetett) Könyvét, létrehozta az Eget és a Földet, sőt, kisbolygókat is teremtett, de a gravitáció törvényének pontos alakját még nem döntötte el!

   Mit tanácsolunk neki, mekkorára válassza a gravitációs törvényben szereplő n hatványkitevőt, ha azt szeretné elérni, hogy egy R sugarú, színaranyból álló homogén kisbolygó felszíne felett és alatt ugyanakkora h távolságban akkor legyen egyforma a gravitációs gyorsulás, ha h/R éppen az aranymetszés híres (és természetesen a Könyvben is szereplő) arányszáma?

   (Gnädig Péter)

10. Tervezzünk egy 300 m magas tornyot pusztán azon az alapon, hogy azt a szél ne dönthesse fel! (Legyen az egyszerűség kedvéért a torony vízszintes keresztmetszete négyzet alakú úgy, hogy a négyzetek középpontja egy függőleges egyenesbe esik! Tételezzük fel, hogy a szél a négyzetek egyik élével párhuzamosan fúj!) A torony alakja legyen olyan, hogy egy adott magasságban a szél által az e magasság felett lévő részre gyakorolt forgatónyomatékot pontosan egyenlítse ki az e magasság felett lévő rész súlyából adódó forgatonyomaték! Milyen függvény írja le a torony alakját? Tételezzük fel, hogy a szél nyomása a torony lábánál 1500 $\mathrm{N/m^2}$, és ez lineárisan emelkedik a torony csúcsáig, ahol 4500 $\mathrm{N/m^2}$, azaz a talajszinten mért érték háromszorosa! Milyen széles lesz így a 300 méteres torony a talajszinten?

    (Frei Zsolt)

11. Egy dob (melyet egy membránnak tekinthetünk) közepén lévő kör alakú lyukat a membrán anyagától különböző, rugalmas anyaggal foltozunk be. Hogyan módosulnak a dob rezgési frekvenciái?

    (Cserti József)

12. Adjunk becslési módszereket egy számítógép processzor-ventilátorának élettartamára! (A ventilátorok általában azért állnak meg, vagy romlanak el, mert tengelyük túlságosan kikopik a gyors forgás és a kenés hiánya miatt.)

    (Pollner Péter)

13. Adott egy kölcsönható tömegpontrendszer, melynek potenciálja a helyvektorok homogén n-ed rendű függvénye. Ilyen rendszert alkotnak pl. az egymással elektrosztatikus erők révén kölcsönható különböző töltésű részecskék. Mutassuk meg, hogy a tömegpontok egyensúlya esetén az összenergia nulla, és a fenti példán kívül keressünk olyan fizikai rendszereket, amelyre érvényes, illetve amelyre nem érvényes a fenti tétel!

    (Tichy Géza és Gnädig Péter, középiskolai feladat nyomán)

14. Bizonyos folyadékok egymás fölé rétegezhetők, miközben éles határfelület alakul ki közöttük. Ha a folyadékok felületi feszültsége különböző, akkor egy érdekes jelenséget lehet megfigyelni. Fújjunk különböző méretű buborékokat az alul elhelyezkedő folyadékba, és figyeljük meg viselkedésüket a határfelület környezetében! Vizsgáljuk meg, és magyarázzuk meg a jelenséget!

    (Rajkovits Zsuzsa)

15. Adjunk kvantitatív becslést az árapály-jelenségek (szökőár, vakár) nagyságára a Földön, s próbáljuk megmagyarázni az ismert extremális értékeket is (pl. St. Malo-i öböl, Szent Lőrinc folyó torkolata, ahol az ingadozás 10–15 méter is lehet)!

    (Pál András)

16. Egy bolygónak állandó hőmérsékletű légköre van, melyre $c_P/c_V = 1$, ennek megfelelően a légkör nyomása a magasság függvényében $\exp(-h/h_0)$ módon változik. A légkör vékony, azaz a bolygó sugara sokkal nagyobb, mint h_0.

    a) Határozzuk meg a bolygó légkörében terjedő, nagy hullámhosszú ($\lambda \gg h_0$) gravitációs (nehézségi) hullámok terjedési sebességét! Milyen sajátfrekvenciákkal oszcillál a bolygó légköre?

    b) Határozzuk meg a bolygólégkör sugárirányú (gömbszimmetrikus) oszcillációinak sajátfrekvenciáit! Mi a felfelé terjedő hullámok diszperziós relációja? Mi történik a felfelé indított hullámok energiájával, mi módon disszipálódik vagy verődik vissza? (A légmentes űrben nyilván nem terjedhetnek hanghullámok).

    (Varga Dezső)

17. Homogén $\mathbf{B}$ mágneses mezőben egy m tömegű, Θ tehetetlenségi nyomatékú, gömbszimmetrikus tömegeloszlású, $\mathbf{d}$ elektromos dipólnyomatékú kicsiny test mozog. Az elektromágneses erőkön kívül más erő nem hat rá.

    a) Keressünk mozgásállandókat!

    b) Írjuk le a test mozgását, ha kezdetben a sebessége nulla, ($\boldsymbol{\omega}_0$) szögsebessége párhuzamos $\mathbf{B}$-vel, $\mathbf{d}$ pedig merőleges $\mathbf{B}$-re!

    (Gnädig Péter, Eötvös-verseny feladat nyomán)

18. Legyen a világunk egy kétdimenziós gömbfelület, melyen az elektrosztatikát a gömbi Poisson-egyenlet írja le!

    a) Határozzuk meg egy ponttöltés keltette elektrosztatikus tér potenciálját! Mi ezzel a probléma? Lehetséges-e egyáltalán, hogy egyetlen ponttöltésen kívül nincs egyéb töltés a világban? Mekkora lehet a világ össztöltése?

    b) Definiáljuk az ℓ-ed rendű pontszerű multipólusokat, és adjuk meg a potenciáljukat!

    c) Oldjuk meg az alábbi Dirichlet-problémát! Két koncentrikus gömbi kör mentén a ϕ_1 és ϕ_2 függvény írja le a potenciált. Írjuk fel a világ mindhárom tartományában az elektrosztatikus potenciált ϕ_1 és ϕ_2 Fourier-együtthatóinak segítségével, ha töltés csak a körökön jelenhet meg! Mi lesz a körök vonalmenti töltéssűrűsége?

    (Eisler Viktor és Farkas Szilárd)

19. Mekkora mágneses dipólmomentum alakul ki egy R sugarú vezető gömbben, ha ω szögsebességgel forgásba hozzuk? (A vezetőben a $-e$ töltésű, m tömegű elektronok szabadon elmozdulhatnak.)

    Becsüljük meg, hogy a Föld mágnességének hányad részét okozhatja ez a mechanizmus!

    (Gnädig Péter)

20. Ampère 1827-ben megjelent „*Az elektrodinamikai jelenségek kizárólag kísérletre alapozott matematikai elmélete*" c. tanulmányában a következő kísérletről számol be: *Tekintsünk három, azonos síkban fekvő kör alakú áramkört, melyek középpontjai, O', O'', és O''', egy egyenesen fekszenek! Legyen a három kör sugara R', R'', R'''. Vezessük mindhárom áramkörbe ugyanazt, az óramutató járásával megegyező irányítású áramot! Ekkor, ha az elrendezés geometriai adatai kielégítik az*

$$\frac{R'}{R''} = \frac{R''}{R'''} = \frac{\overline{O'O''}}{\overline{O''O'''}}$$

    feltételt, akkor a középső vezető-körre nem hat erő, s ez akkor is igaz marad, ha ebben az áram irányát ellenkezőjére változtatjuk.

    Igazoljuk, hogy Ampère megfigyelése összhangban áll az elektromágnesség alaptörvényeivel!

    (Horváthy Péter)

21. Azonos L hosszúságú és R_0 értékű ellenállásokból, mint élekből végtelen négyzetrácsot készítünk. A kapott végtelen ellenálláshálózatot két egymással párhuzamos és egymástól $N\sqrt{2}L$ távolságban lévő átlója mentén elvágjuk, ahol N egész. Így a vágások között keletkezik egy végtelen csík, melynek szélessége $N\sqrt{2}L$. Ezt a csíkot véges szélességével, mint kerülettel, hengerré tekerjük, azaz a csík széleinek szemközti pontjait rövidre zárjuk. Adjuk meg az így kapott hálózat tetszőleges két pontja között az eredő ellenállást, de legalábbis mutassuk meg, hogy ki tudnánk egzaktul számolni! Próbáljunk numerikus végeredményt is adni néhány pontpárra $N = 2$ és $N = 3$ esetén! Ajánlott irodalom: Monwhea Jeng, *Random walks and effective resistances on torodial and cylindrical grids*, Am. J. Phys. **68**, 37-40 (2000).

    (Gáspár Merse Előd)

22. Mutassuk meg közvetlenül, hogy a harmonikusan rezgő pontszerű dipólus elektromos és mágneses tere (ld. pl. Jackson: Classical Electrodynamics, Wiley, 1975; 1998; magyarul Gálfi L. – Patkós A.: Klasszikus elméleti elektrodinamika, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003, vagy Benedict M.: Elektrodinamika, JATE Press, Szeged, 2000) *a teljes térben* kielégíti a Maxwell-egyenleteket!

    (Benedict Mihály)

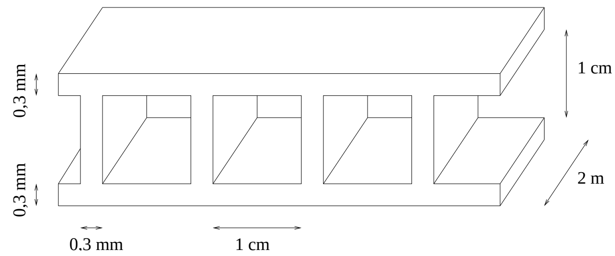
23. Tudjuk, hogy a lenyugvó/felkelő Nap nem kör, hanem zsemle alakú. Adjunk becslést a napkorong lapultságának mértékére! Milyen légköri viszonyok kellenek ahhoz, hogy a lenyugvó Nap képe ne legyen összefüggő (igen ritka jelenség)?

    (Pál András)

24. Tervezzünk olyan passzív optikai eszközt, amely segítségével a lehető legtöbb napfényt lehet egy adott felületre koncentrálni napkeltétől napnyugtáig! A motivációt az jelenti, hogy a napelemek (fotovoltaikus cellák) még viszonylag drágák, ezért minden olyan megoldás sokat segít, amivel olcsón meg lehet növelni a teljesítményüket.

(Farkas Zénó)

25. Teraszunkat az autóbuszmegállók tetejeként is használt ún. *lexan* táblával fedtük le. Ez két egymástól 1 cm távolságra lévő, kb. 0,3 mm vastag átlátszó lemezből áll. A két lemez között rájuk merőleges síkú, ugyanabból az anyagból készült, ugyanolyan vastag távtartó cellafalak húzodnak, egymástól 1 cm távolságra. A távtartók a tető lejtésének irányában állnak. Milyen a Hold képe a tetőn át, különböző szögekből nézve?



(Csabai István)

26. Fújjunk szappanbuborékot, majd helyezzük folyadék felszínére, illetve sima lemezre! Napfénnyel megvilágítva fényes foltok jelennek meg a buborékokon. Vizsgáljuk meg, és magyarázzuk meg a jelenséget!

(Rajkovits Zsuzsa)

27. Arthur C. Clarke *2010* című regényében és a belőle készült filmben a szuperintelligens (és szupertechnika birtokában levő) idegenek a Jupitert csillaggá alakítják át abból a célból, hogy az Európa nevű Jupiter-hold jéggel fedett óceánjában élő lényeknek zavartalan környezetet biztosítsanak a további fejlődéshez. A film utolsó kockáin lírai képeket láthatunk a Föld nagyvárosai felett világító két (régi és új) Napról.

Tekintsünk el a csillaggá alakítás technikai nehézségeitől (és attól is, hogy mai csillagfizikai ismereteink szerint a Jupiter tömege túl kicsi ehhez – az idegenek bizonyára jobban tudják a csillagfizikát és -technológiát), és vizsgáljuk meg a jelenség hatását a Naprendszerre! Tegyük fel, hogy az idegenek takarékosak: az új csillag épp csak akkora luminozitású, hogy az Európa jege felolvadjon, és az óceán hőmérséklete nagyjából a földi óceánok hőmérsékletének szintjén stabilizálódjon.

Milyen fényesnek látszik az új csillag (a regényben Lucifernek nevezik) a Földről? Látható-e a nappali égen? Mennyire változik hatására a Föld éghajlata? Milyen hatásai lesznek a változásnak a Naprendszer különböző objektumaira nézve?

(Dávid Gyula)

28. **Marx György emlékére**

A Nordström-féle Lorentz-kovariáns gravitációelmélet (1912) szerint egy M tömegű pontrészecskére ható gravitációs erő a következő képlettel írható le:

$$F_k = M\,\partial_k\Phi,$$

ahol M a részecske nyugalmi tömege, $\Phi(\mathbf{r},t)$ pedig egy négyesskalármező.

a) Mutassuk meg, hogy a fenti erőtörvény esetén a részecske négyesgyorsulása valóban független a részecske tömegétől!

b) Tekintsünk stacionárius, azaz (egy adott inerciarendszerben) időtől független Nordström-mezőt! Számítsuk ki a részecske hármasgyorsulását, és mutassuk meg, hogy független a nyugalmi tömegtől!

c) Vizsgáljuk meg a vízszintes hajítás problémáját homogén stacionárius Nordström-mezőben! Legyen $\Phi = gz$, és induljon a részecske h magasságból v_0 vízszintes irányú kezdősebességgel! Számítsuk ki a részecske pályáját, a földet érés idejét, valamint határozzuk meg az azonos időpontban, de különböző kezdősebességgel elindított részecskék által t idő elteltével kirajzolt görbét! Mekkora lesz a részecske sebessége, ha $t \to \infty$? Milyen feltételezéssel kapjuk vissza a klasszikus newtoni elmélet eredményeit? Mekkora az eltérés nagyságrendje, ha g megegyezik a földi nehézségi gyorsulással, a kiinduló magasság néhányszor tíz méteres, a kezdősebesség pedig néhányszor tíz m/s nagyságrendű?

d) Ismételjük meg a fenti vizsgálatokat ún. reciprok tömegerő esetében, azaz ha az erőtörvény:

$$F_k = \frac{1}{M}\,\partial_k V(\mathbf{r},t),$$

ahol V ismét egy négyesskalármező! Mekkora lesz a homogén erőtérben vízszintesen elhajított részecske sebessége, ha $t \to \infty$? Nem találjuk furcsának az eredményt?

(Dávid Gyula)

29. A jelenlegi gravitációshullám-detektorokkal mérhető jel egy fajtája lehet a gravitációs fékezési sugárzás, ami akkor jön létre, ha két kompakt csillag hiperbolikus pályán elhalad egymás mellett. A kibocsátott gravitációs sugárzás karakterisztikus frekvenciája $f = v/b$, ahol b az elhaladás során létrejött legkisebb távolság, és v az ottani relatív sebesség.

Becsüljük meg egy tipikus gömbhalmazból várható jelek azon részének időbeli gyakoriságát, amely a földi gravitációs detektorok mérhető frekvenciatartományába esik (100 és 3000 Hz közé)! Számoljunk $N = 10^6$ csillaggal, melyek egyenletes eloszlással töltik ki az $R = 10$ fényév sugarú gömböt! Vizsgáljuk meg az „ideális gáz” közelítést, majd vegyük figyelembe a gravitáció által okozott pályaelhajlásokat is!

(Kocsis Bence és Gáspár Merse Előd)

30. Az általános relativitáselmélet kialakulásának korai szakaszában Einstein és mások úgy próbálták figyelembe venni a gravitáció hatását a téridőnek a speciális relativitáselmélet által leírt szerkezetére, hogy feltételezték: a fénysebesség nem univerzális állandó, hanem a helyi gravitációs potenciál által meghatározott, pontról pontra változó mennyiség. Ennek megfelelően a szabad (csak a gravitáció hatása alatt mozgó) pontrészecske hatásintegrálját a következő alakban írták fel:

$$S = -mc_0 \int ds = \int (-mc_0)\sqrt{c(\mathbf{r},t)^2 - v^2}\, dt,$$

ahol v a részecske sebessége, c_0 a gravitációmentes térben érvényes fénysebesség, $c(\mathbf{r},t)$ pedig a helyről helyre változó lokális fénysebesség.

a) Tekintsük az utóbbi kifejezés integrandusát hagyományos, klasszikus mechanikai Lagrange-függvénynek, és vezessük le a mozgásegyenleteket!

b) Tegyük meg ugyanezt kovariáns formalizmusban is! (Vigyázat!)

c) Milyen téregyenletet kellene felírnunk a $c(\mathbf{r},t)$ függvényre, ha ki szeretnénk elégíteni az ekvivalencia-elvet?

d) Vizsgáljuk meg a sztatikus gravitációs tér esetét, azaz a $c(\mathbf{r})$ esetet! Vezessük le a részecske mozgásegyenletét, és keressük meg az energiaintegrált! Fogalmazzuk meg a feladattal ekvivalens optikai problémát (használjuk a Fermat-elvet)!

e) Mutassuk meg, hogy a fenti elmélet tekinthető egy speciális metrikájú (görbült) Riemann-térben történő geodetikus mozgás leírásának is! Számítsuk ki a teret gerjesztő folytonos anyageloszlás (mező) energia–impulzus-tenzorát (és ha tudjuk, a mező Lagrange-sűrűségét is)!

(Dávid Gyula)

31. Ismeretes, hogy a relativitáselméletben, illetve a kvantumelméletben nem létezik szigorú értelemben vett merev test. Ismert továbbá, hogy a pontrendszerek klasszikus mechanikája a Riemann-sokaságokra is kiterjeszthető, merev test azonban csak homogén sokaságokon létezhet. Egy „lazán merev” test, azaz néhány tömegpont, melyeket erős rugók kötnek össze, a merev testtel ellentétben tetszőleges Riemann-sokaságon szabadon mozoghat, s ez esetben egy, a szabad tömegpontok mozgásánál nem tapasztalat effektus lép fel: egy nem homogén sokaság a nyugvó „lazán merev” testre is fejt ki erőt. Mitől függ ez az erő, legalább hány tömegpontból álló „lazán merev” test kell hozzá? Keressünk olyan modellt, amelyben az erő helyfüggése megegyezik a Newton-féle gravitációs törvénnyel! Feltehetjük, hogy a merev test mérettartományában a sokaság görbülete csak kis mértékben változik.

(Pozsgai Balázs)

32. Egy gömb alakú diffúzív közeg rádiumot tartalmaz homogén eloszlásban. A keletkező radon egy része ki tud jutni a gömbből a levegőre. Határozzuk meg a gömb radonaktivitását a sugár függvényében, ha ismerjük a diffúziós állandókat és a gömb rádiumaktivitás-koncentrációját (aktivitás/térfogat)! (Használjunk realisztikus nagyságrendű paramétereket!)

(Horváth Ákos)

33. Egy ^{8}Li atommag 100 MeV mozgási energiával száguld egy $Z = 82$ rendszámú, pozitív töltésű, térben rögzítettnek tekintett atommag felé. A ^{8}Li az atommag elektromágneses teréből hirtelen 2333 keV energiát vesz fel. Ennek egy része, 2033 keV arra fordítódik, hogy egy neutront lehasítson a lövedék magból. Így a ^{8}Li szétesik egy ^{7}Li atommagra és egy neutronra. A maradék 300 keV energia a keletkezett részecskék mozgási energiájaként szabadul fel. Írjuk le a tömegközéppont pályáját! (Az energiafelvétel természetesen impulzusátadással is jár, ezt az impulzusváltozást azonban elhanyagolhatjuk.)

(Horváth Ákos)

34. **Teller Ede emlékére**

Tekintsünk egy kétdimenziós, hengerszimmetrikus harmonikus potenciálgödröt, melyben egymással nem kölcsönható elektronok mozognak: $V(x,y) = k(x^2+y^2)/2$. A potenciált létrehozó ionok egyik normálrezgése (kanonikus koordinátái: Z, P) az alábbi módon deformálja V-t:

$$V(x,y) = \frac{k+\alpha Z}{2}x^2 + \frac{k-\alpha Z}{2}y^2.$$

a) Írjuk fel klasszikusan egy elektron és a fonon csatolt rendszerének mozgásegyenleteit, és oldjuk meg adiabatikus közelítésben (az elektronokhoz képest a fonon lassan mozog)! Értelmezzük az eredményt! Milyen feltételeknek kell teljesülnie α-ra, hogy a „molekula” (a fonon és az elektronok rendszere) stabil maradjon?

b) Oldjuk meg az egyelektron-problémát kvantumosan is α-ban első rendig! (Mi a kis paraméter?) A nívók milyen betöltöttségénél találunk Jahn–Teller-effektust?

c) Szűkítsük le a Hilbert-teret: tekintsük csak a két alsó elektronnívót, így nem kell α-ban első rendnél megállni. Mikor kapunk dinamikus és mikor sztatikus Jahn–Teller-effektust?

Ajánlott irodalom: J.C. Slonczewski: *Theory of the Dynamical Jahn-Teller Effect*, Physical Review **131**, 1596-1610 (1963).

(Fehér Titusz)

35. Homogén külső $\mathbf{B}$ térbe helyezett R sugarú, elhanyagolható vastagságú karikában mozgó elektron Hamilton-operátora nemrelativisztikus esetben a következő alakú:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - e\mathbf{A}\right)^2 - \mu\,\mathbf{B}\,\boldsymbol{\sigma},$$

ahol az első tag a kinetikus energiát, a második tag a Zeeman-kölcsönhatást írja le, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ a Pauli-mátrixokból alkotott vektor, $\mathbf{A}$ pedig a vektorpotenciál. A külső $\mathbf{B}$ tér nem feltétlenül merőleges a karika síkjára. Határozzuk meg az elektron energiaszintjeit!

(Cserti József)

36. Egy v ($\ll c$) sebességgel egyenes vonalú, egyenletes mozgást végző kétállapotú kvantumrendszert (qbit) vizsgálunk a kvantumos természetű kétdimenziós téridőben. A qbit kezdeti állapota legyen $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, ahol $|0\rangle$ és $|1\rangle$ az energia-sajátállapotok. A téridő metrikáját az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$ vektorral jellemezzük:

$$g_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1+1 & a_2 \\ a_3 & a_4+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1+1 & a_3 \\ a_2 & a_4+1 \end{pmatrix}.$$

Egy $|g_{\mathbf{a}}\rangle$ állapotban a metrika 1 valószínűséggel $g_{\mathbf{a}}$. A téridő fluktuációit – nagyon leegyszerűsítve – a következő sűrűségmátrixszal jelemezzük: $\rho_g = \int d\mathbf{a} f(\mathbf{a}) |g_{\mathbf{a}}\rangle\langle g_{\mathbf{a}}|$, ahol $f(\mathbf{a}) = \exp(-\mathbf{a}A\mathbf{a})$, A pedig az egységmátrixszal arányos, és az arányossági tényező biztosítja, hogy a fluktuációk kicsik legyenek. A téridő egy $|g_{\mathbf{a}}\rangle$ állapotában a qbit $|k\rangle$ energia-sajátállapotának időfejlődése:

$$|g_{\mathbf{a}}\rangle|k\rangle \to |g_{\mathbf{a}}\rangle|k\rangle \exp(i\omega_k \tau_{\mathbf{a}}),$$

ahol ω_k a k-adik energia-sajátállapot frekvenciája, $\tau_{\mathbf{a}}$ pedig a sajátidő az $\mathbf{a}$-val jellemzett metrikában. Mutassuk meg, hogy a qbit redukált sűrűségmátrixának nemdiagonális elemei exponenciálisan csökkennek az idővel! (Segítség: $\tau_{\mathbf{a}}$-t $\mathbf{a}$-ban másodrendig fejtsük sorba!)

(Egri Győző)

37. Aliz meg akarja üzenni Bobnak, hogy az I, X, Z és Y helyek közül hol találkozzanak, de úgy, hogy Éva, aki rettentően kíváncsi, ne tudja megfejteni az üzenetet. Szerencsére van egy forrás, amely egy feles spinű részecskékből álló párt bocsát ki: az A jelű részecskét Aliz, a B jelűt Bob kapja, de a forrás olyan, hogy a két részecske teljes spinje 0, azaz a pár a $|\Psi\rangle = (|+\rangle_A |-\rangle_B - |-\rangle_A |+\rangle_B)/\sqrt{2}$ szinglett spinállapotban van. Aliz, tervének megfelelően, az A jelű részecskén a következő négy transzformáció valamelyikét hajtja végre: I: nem csinál semmit; X: átfordítja a spint ($|+\rangle_A \rightleftarrows |-\rangle_A$); Z: π relatív fáziskülönbséget iktat a $|+\rangle_A$ és a $|-\rangle_A$ állapotok közé; vagy az $Y = XZ$ műveletet, a két utóbbi szorzatát hajtja végre. Ezután átküldi az A jelű részecskét Bobnak. Bob ekkor az ő B részecskéjének átbillenti a spinjét, ha az Aliztól megkapott A jelű részecske állapota $|-\rangle_A$, és nem csinál semmit, ha az állapot $|+\rangle_A$, miközben az A részecske állapotát nem változtatja meg. Ezután Bob először a B majd az A részecskén egy-egy *mérést* végez.

Milyen (megfigyelhető) mennyiségeket kell mérnie ahhoz, hogy biztosan megtudja, mit üzent Aliz? Miért nem tudhatja meg a találka helyét Éva, ha esetleg őhozzá jut az Aliztól Bobhoz küldött részecske? Indokoljuk meg, hogy miért lehetségesek elvileg a Bob két utolsó mérését megelőző transzformációk, anélkül, hogy egyéb változások történnének!

(Benedict Mihály)

38. Becsüljük meg, mekkora fényintenzitás szükséges a Csillagok Háborújában látható fénykardok létrehozásához, azaz mikor viselkedik véges rúdként egy fénynyaláb! Vizsgáljuk egy ilyen harci eszköz használhatóságát, pl. mekkora erő szükséges a kézben tartáshoz stb.!

(Veres Gábor)

39. Manapság nagy divat PC farmokat vásárolni. Rács Rezső is szeretne egy ilyet, hogy a programjai párhuzamosítva futhassanak. Páros számú (n) számítógépet szeretne vásárolni, és egy gyűrűbe kapcsolná őket (minden gép a két szomszédjával tud kommunikálni). A gépek állapotát egy szám jellemzi, amely azt mutatja meg, hogy eddig hány számítási lépésen vannak túl. A páros sorszámú gépek állapotai az egész számokon ($\in \mathbb{N}$), a páratlan sorszámúaké a félegészeken ($\in \mathbb{N} + 1/2$) futnak végig. A kezdőállapot: 0, $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, $\ldots$ A számítás diszkrét lépésekben folyik: egy gép egy lépést p valószínűséggel 1, $1-p$ valószínűséggel k időegység alatt tesz meg. Csak az a gép tud továbbszámolni, amelynek mindkét szomszédja előrébb jár nála, a többinek várnia kell. A farm teljesítményének az egyszerre dolgozó gépek átlagos számát hívjuk. Segítsünk Rezsőnek a farm teljesítményének előrejelzésében!

a) Először csak 4 számítógépre futja a pénzéből. Számítsuk ki a farm teljesítményét $k = 2$ esetén p függvényében!

b) Rezső bővíti a gépparkot. Mit mondhatunk a teljesítményről $n = 6, 8, \ldots$ esetén, $k = 2$-re?

c) Mekkora a teljesítmény általános k és n esetén?

Megjegyzés: Rezső az egzakt és közelítő eredményeknek egyaránt örül, de a szimulációs eredmények csak mint illusztráció érdeklik.

(Egri Győző)

40. Egy átlagos (pl. kollégiumi) szobában, ha zárva van az ablak, és sokan, sokáig tartózkodnak bent, büdös lesz. Ha eközben a nap is besüt az ablakon, akkor felmelegszik a levegő — azaz szép lassan meleg is lesz, meg büdös is. Viszont ha sokáig nyitva tartjuk az ablakot, akkor hideg lesz a szobában.

    Dolgozzunk ki viszonylag kompromisszumos eljárást (az eljárás alatt az értendő, hogy mikor és milyen periódusokkal szellőztetünk), hogy minél kevésbé legyen elviselhetetlen a szoba! Vegyük figyelembe a következő, általában helytálló tényeket: az emberek nappal nem nagyon vannak a szobában, inkább csak délután/este, a külvilág hőmérséklete a tapasztalatoknak megfelelően változik, (szó szerint) üvegházhatás lép fel, stb.

    Tudjuk, hogy a hővezetést és a gázok keveredését is a diffúziós egyenlettel lehet jól leírni, ha nincs légmozgás. Ha van légmozgás, az viszont egyszerre keveri a levegőt, egyenletesebbé téve ezzel a hőmérséklet és a gáz-koncentráció eloszlást is.

    Hogyan kell változtatni a kidolgozott eljáráson, ha egy egyetemi szemináriumi szobát/előadótermet szeretnénk elviselhetőbbé tenni (ahol szintén jelentkeznek ezek az effektusok, csak más időeloszlásban tartózkodik benne sok ember)?

(Pál András)

41. A távoli Quumbrantapaguia bolygó lakói Föld körüli pályára állítanak egy kutató űrhajót. Az expedíció célja, hogy intelligens életformát keressenek bolygónkon. Civilizációjuk anyagi és kommunikációs alapjai tökéletesen eltérnek a mienktől, ezért tűz, elektromosság, rádió, beszéd, művészet vagy tudomány semmit sem jelent számukra. Egyetlen észlelő műszerük arra képes, hogy nyomon kövesse a földi élőlények trajektóriáit, de a sebesség és gyorsulás sem jelent semmit sem számukra, ráadásul a műszer csak a biológiai aktivitást igénylő mozgásokat észleli. Létezik-e olyan mozgásforma, amely a trajektóriák mintázat-elemzése alapján egyértelműen arra utal, hogy az emberi faj intelligens? Találnak-e más intelligens fajt is a Földön?

(Jánosi Imre)

42. A koncentrikus korallzátony-gyűrűkkel övezett, kókuszpálmáiról nevezetes Focus-sziget közelében, a kristálytiszta víz fenekén hever fényes pályafutása után bekövetkezett legendás hajótörése óta Félfejű Joe, a rettegett kalózkapitány háromárbocos hajója, a Szent Snellius. A messewani egyetem híres kutatója, J. B. Curcas, az atlantiszi csillagvizsgáló közismert felfedezője (lásd az 1991. évi Ortvay verseny 25. feladatát) és asszisztense, Lee ben Canal szeretné felkutatni a kapitány kincsét. Repülőgépük állandó magasságban, egyenes vonalban halad a tenger felett. A két kincskereső kidülledt szemekkel fürkészi a tükörsima vízfelszín alatt velük szembe száguldó tengerfeneket. Egyszer csak messze maguk előtt megpillantják az elsüllyedt hajót. De az első öröm után Lee ben Canal halálra váltan felsikolt: „Uram Isten, megmozdult!” És valóban: az elképedt kutatók szeme láttára a kalózhajó furcsa mozgásba kezd...

    Legalábbis így olvastuk a történteket a messewani egyetemről érkezett, kissé gyűrött, és ezért nehezen kisilabizálható e-mail-ben. Hát ezért maradt el a kincs kiemelése, és ezért nem ajánlhatják fel a pihent agyú szervezők Félfejű Joe legszebb aranykeretes kontaktlencséit az Ortvay verseny győzteseinek.

    Már csak az a kérdés van hátra: milyen pályán látták mozogni a messewani kutatók a Szent Snelliust?

(Cserti József, Dávid Gyula, Piróth Attila)

\end{document}